数理解析研究所講究録
1487 巻 2006 年 96-100

Perturbed balanced metrics and Tian-Zelditch-Catlin's theorem

大阪大学大学院理学研究科 満渕俊樹
Toshiki Mabuchi (Osaka Universwity)

偏極代数多様体の安定性と特殊計量の存在との関係については「小林-ヒッチン対応の重力場版」が知られており，Yau の予想とも呼ばれている．特殊計量として定スカラー曲率をもつケーラー計量の場合を考えると，Tian の先駆的な結果に続き，正則アフィン自己同型が次元をもたない場合に，Donaldson が決定的な定理を得た．以下の小論では，この Donaldson の結果について，漸近的ベルグマン核への陰関数定理の適用という見地から証明の簡略化を試みる．以下 $L \to M$ を，n 次元連結非特異射影代数多様体 M 上の very ample な正則直線束とし，L のエルミート計量 h を，対応するチャーン形式 $\omega := c_1(L;h)$ がケーラー形式になるようにとる．

[I] 背景. 複素ベクトル空間 $V_m := H^0(M, \mathcal{O}(L^m))$ に，エルミート計量を

$$V_m \times V_m \to \mathbb{C}, \qquad (\sigma,\tau) \mapsto \int_M (\sigma,\tau)_h \omega^n \in \mathbb{C},$$

で定義する．ただし $(\sigma,\tau)_h$ は，σ, τ の，計量 h^m による pointwise な内積を意味する．V_m の正規直交系 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_m}\}$ をとり，m-th ベルグマン核 $B_{m,\omega}$ を

$$B_{m,\omega} := \frac{n!}{m^n}\left(|\sigma_1|_h^2 + |\sigma_2|_h^2 + \cdots + |\sigma_{N_m}|_h^2\right)$$

で定める．一方 $\Omega := \{\ell \in L^*; |\ell|_h < 1\}$ に対して，その境界 $X := \partial\Omega = \{\ell \in L^*; |\ell|_h = 1\}$ を M 上の S^1-bundle と考え $\mathrm{pr} : X \to M$ を自然な射影とする．X の Szegö kernel

$$S_\omega = S_\omega(x,y) : L^2(X) \to L^2(X) \cap \mathcal{O}(\omega)$$

に対し X 上の関数 $S_{m,\omega}$ を

$$S_{m,\omega} := \frac{n!}{m^n}\int_M e^{-im\theta}\, S_\omega(e^{i\theta}x, x)\, d\theta, \qquad x \in X,$$

で定めると $S_{m,\omega} = \mathrm{pr}^* B_{m,\omega}$ が成り立つ．この意味で，$B_{m,\omega}$ は S_ω の第 m 番目の Fourier 係数 にあたるものと考えられるが，Fourier coefficients の代わりに

Fourier 変換を考えることにより，正整数 m を一般の複素数 $\xi \neq 0$ にまで拡張して $B_{\xi,\omega}$ を定義する．この事情を理解するために，M が 1 点から成る場合を先ず考える．

Case: $M = \{1\,\mathrm{point}\}$．このとき，$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の一変数関数 $S = S(\theta) \in C^\infty(S^1)$ を考える．この第 m 番目の Fourier 係数 S_m は

$$S_m = \int_{S^1} e^{-im\theta}\, S(\theta)\, d\theta \;=\; \int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\, S(\theta)\, d\theta.$$

$I_1 := (-3\pi/4, 3\pi/4)$，$I_2 := (\pi/4 7\pi/4)$ に対して，$U_\alpha := I_\alpha \bmod 2\pi$，$\alpha = 1, 2$，とおく．開被覆 $S^1 = U_1 \cup U_2$ に附随したS^1 の 1 の分解を

$$1 = \rho_1(\theta) + \rho_2(\theta), \qquad \theta \in S^1$$

とすると，$\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \subset U_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, が成り立っていることに注意する．$\mathbb{R}^1$ 上の自然な座標を $\tilde{\theta}$ とし，これが S^1 上に誘導する座標 $\tilde{\theta} \bmod 2\pi$ を θ とおく．さらに $\mathbb{R}^1$ 上の関数 $\tilde{\rho}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, を

$$\tilde{\rho}_\alpha(\tilde{\theta}) \;=\; \begin{cases} \rho_\alpha(\theta) & \tilde{\theta} \in I_\alpha, \\ 0 & \tilde{\theta} \notin I_\alpha. \end{cases}$$

で定める．このとき，S^1上の関数 $S = S(\theta)$ に対して，コンパクトな台をもつ $\mathbb{R}^1$ 上の関数 $\tilde{S}(\tilde{\theta}) := S(\theta)\{\tilde{\rho}_1(\tilde{\theta}) + \tilde{\rho}_2(\tilde{\theta})\}$，$\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^1$，を対応させ，その Fourier 変換

$$(\mathcal{F}S)(\xi) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^1} e^{-i\xi\tilde{\theta}}\, \tilde{S}(\tilde{\theta})\, d\tilde{\theta} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\tilde{\theta}}\, \tilde{S}(\tilde{\theta})\, d\tilde{\theta}, \qquad \xi \in \mathbb{C}^*,$$

を考えると $\mathcal{F}S$ は ξ の整関数で，しかも $(\mathcal{F}S)(m) = S_m$，$m \in \mathbb{Z}$，が成り立つが，この $\mathcal{F}S$ は S からは一意的に決まらず，1 の分解の取り方によることに注意する．

Case: $M =$ 一般．この場合に，discrete に定義された $S_{m,\omega}$, $m \in \mathbb{Z}$, を連続的な object として一般化して

$$\{(\mathcal{F}S_\omega)(x,y)\}(\xi) := \frac{n!}{\xi^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\tilde{\theta}}\, S_\omega(e^{i\theta}x, y)\, \{\tilde{\rho}_1(\tilde{\theta}) + \tilde{\rho}_2(\tilde{\theta})\}\, d\tilde{\theta}, \quad \xi \in \mathbb{C}^*,$$

と定め，X 上の関数 $\{(\mathcal{F}S_\omega)(x,x)\}(\xi)$, $x \in X$, が 引き戻し $\mathrm{pr}^* B_{\xi,\omega}$ に等しくなるように M 上の関数 $B_{\xi,\omega}$ を定める．

[II] Donaldson の安定性定理. M の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ のアフィン部分を H としたとき，Donaldson [1] は，H が有限群の場合に，安定性に関する以下の決定的な結果を得た．

定理：偏極類 $c_1(L)$ が定スカラー曲率のケーラー計量を含むとし，H が有限次元とする．このとき，(M, L) は漸近 Chow-Mumford 安定である．

ここでは，漸近 Chow-Mumford 安定性の定義を述べておこう．正整数 m に対し，完備線形系 L^m による M の小平埋め込みを

$$\iota_m : M \hookrightarrow \mathbb{P}^*(V_m)$$

とする．複素射影空間 $\mathbb{P}^*(V_m)$ 内での $\iota_m(M)$ の次数を d_m とし，$W_m := \{S^{d_m}(V_m)\}^{\otimes n+1}$ とおくとき，W_m^* に属する $M_m \neq 0$ が存在して，対応する元 $[M_m] \in \mathbb{P}^*(W_m)$ が，$\mathbb{P}^*(V_m)$ 上の規約かつ被約な代数的サイクル $\iota_m(M)$ の Chow point となるようにとれる．代数群 $G_m := \mathrm{SL}(V_m)$ の V_m への作用が，G_m の W_m^* への自然な作用を誘導することに注意せよ．

定義. (a) 軌道 $G_m \cdot M_m$ が W_m^* の閉集合であるとき，(M, L^m) は *Chow-Mumford* 安定であるという．

(b) (M, L) が漸近 *Chow-Mumford* 安定であるとは，$m \gg 1$ のとき (M, L^m) が Chow-Mumford 安定であるときにいう．

以下に，(M, L^m) の Chow-Mumford 安定性を，ベルグマン計量の言葉を用いて表すことができるという Zhang の結果を紹介しよう．

[III] balanced metrics. ケーラー多様体 (M, ω) 上でラプラシアン $\Delta_\omega := \bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*$ を考える．また，(M, ω) のスカラー曲率を σ_ω とし，その平均を $\bar\sigma$ とする．$m \gg 1$ では，N_m は m の Hilbert 多項式 $P(m)$ として書け，

$$C_\xi := \frac{n!P(\xi)}{\xi^n c_1(L)^n[M]}, \qquad \xi \in \mathbb{C}^*,$$

とおくと，$C_\xi = 1 + (q/2)\bar\sigma + O(q^2)$．ただし $q = 1/\xi$．さらに

$$\beta_{q,\omega} \;:=\; 2\xi\,(1 + \frac{2q}{3}\Delta_\omega)\,(B_{\xi,\omega} - C_\xi)$$

とおくと，$\beta_{q,\omega}$ が M 上定数であることと $B_{\xi,\omega}$ が M 上定数であることは明らかに同値となるが，この同値な条件が満たされるとき，ω を ξ-balanced metric とよぶ．特に，ξ が正整数 m に等しいときは，次の Zhang [4] の結果は大切である：

事実： (M, L^m) が Chow-Mumford 安定であることと，ω が m-balanced metric であることは同値である．

[IV] Tian-Zelditch-Catlin's theorem. ベルグマン核 $B_{m,\omega}$ の Tian-Zelditch-Catlin による漸近展開（たとえば [3] を参照）は，正整数 m が実数 ξ になった場合でも成り立つ．すなわち $q = 1/\xi$ とおいて

$$B_{\xi,\omega} \;=\; 1 + \frac{\sigma_\omega}{2} q \;+\; O(q^2), \qquad 1 \ll \xi \in \mathbb{R}.$$

ここで，q の1次の係数として $\sigma_\omega/2$ がでてくるのは，Lu [2] による．これを用いると $\beta_{q,\omega}$ は次のように書ける：

$$\beta_{q,\omega} \;=\; \sigma_\omega - \bar{\sigma} \;+\; O(q), \qquad 1 \ll \xi \in \mathbb{R}.$$

よって $q = 0$（すなわち $\xi \to +\infty$）に制限すると，$\beta_{q,\omega}$ は $\sigma_\omega - \bar{\sigma}$ となり定数を法として考えるとスカラー曲率に他ならない．

[V] Donaldson の定理の **simplification.** 写像 $(q, \omega) \mapsto \beta_{q,\omega}$ に陰関数の定理を適用できると仮定して，Donaldson の安定性定理に簡単な証明を与えよう．ω_0 を偏極類 $c_1(L)_{\mathbb{R}}$ に属する定スカラー曲率のケーラー計量とする．偏極類 $c_1(L)_{\mathbb{R}}$ に属するケーラー計量 ω を $\omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi$ と書く．ただし φ は積分 $\int_M \varphi\omega_0^n$ が零となるように正規化しておく．こうしたケーラー計量 ω を与えることと関数 φ を与えることは同値なので，$\beta_{q,\omega}$ を $\tilde{\beta}_{q,\varphi}$ と書くことにする．すなわち

$$\beta_{q,\omega} \;=\; \tilde{\beta}_{q,\varphi}, \qquad \omega = \omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi,$$

が正規化された φ について成り立ち，しかも $\sigma_{\omega_0} = \bar{\sigma}$ なので

$$\tilde{\beta}_{0,0} \;=\; 0$$

が成り立っている．もっとも，陰関数定理を用いる大前提として，フレッシェ微分 $D_\omega\beta_{q,\omega}$ を点 $(q, \omega) = (0, \omega_0)$ で求めて，その invertibility を見る必要がある．つまり点 $(q, \varphi) = (0, 0)$ におけるフレッシェ微分 $D_\varphi\tilde{\beta}_{q,\varphi}$ の invertibility を調べれば良い．ここで，積分 $\int \psi\,\omega_0^n$ が零となるような滑らかな ψ に対し

$$\begin{aligned}
\{(D_\omega\tilde{\beta}_{q,\varphi})(\psi)\}_{|(q,\varphi)=(0,0)} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\tilde{\beta}_{0,\varepsilon\psi} - \tilde{\beta}_{0,0}}{\varepsilon} \\
= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma_{\omega_0+\varepsilon\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\psi} - \sigma_{\omega_0}}{\varepsilon} &= \mathcal{L}_{\omega_0}\psi
\end{aligned}$$

が成り立つが，$\mathcal{L}_{\omega_0}$ は4階の楕円型作用素でリヒネロヴィッチ作用素とよばれているものである．ところで H が有限群の場合は，正規化された滑らかな関数に対して $\mathcal{L}_{\omega_0}$ は invertible なので，陰関数の定理を用いて，φ に関する方程式，

$$\tilde{\beta}_{q,\varphi} = 0,$$

言い換えれば，ω の方程式 $\beta_{q,\omega} = 0$ を十分小さな正数 ε に対して $|q| < \varepsilon$ の範囲で解くことが出来て，解としてケーラー計量

$$\omega = \omega(q), \qquad |q| < \varepsilon,$$

を得て $\beta_{q,\omega(q)} = 0$ が成り立つ．よって正整数 $m \gg 1$ に対して $q := 1/m$ とおくと，$|q| < \varepsilon$ をみたすので，[III] により $\omega(q)$ は balanced metric，すなわち (M, L^m) は Chow-Mumford 安定となる．

最後に，いかなる形の陰関数定理が適用可能かということについては，Nash-Moser のプロセスなどとともに別の機会に論じることにする．

References

[1] *S.K. Donaldson*: Scalar curvature and projective embeddings, I, J. Differential Geom. **59** (2001), 479–522.

[2] *Z. Lu*: On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch, Amer. J. Math. **122** (2000), 235–273. preprint

[3] *S. Zelditch*: Szegö kernels and a theorem of Tian, IMRN **6** (1998), 317–331.

[4] *S. Zhang*: Heights and reductions of semi-stable varieties, Compositio Math. **104** (1996), 77–105.